Clasa a XI-a

Subiectul 1. Arătaţi că, dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ satisface $A^4 = I_2$, atunci $A^2 = I_2$ sau $A^2 = -I_2$.

Soluţie. Se ştie că $A^2 = aA + bI_2$, unde a este suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A şi $b = -\det(A)$. Atunci

$$A^4 = a^2A^2 + 2abA + b^2I_2 = a(a^2 + 2b)A + (a^2b + b^2)I_2. \quad (1)$$

Apoi, $b^4 = (\det(A))^4 = \det(A^4) = \det(I_2) = 1$ şi $b \in \mathbb{Z}$, deci $b = \pm 1$; cum $a \in \mathbb{Z}$, rezultă că $a^2 + 2b \neq 0$.

Astfel, din (1) şi $A^4 = I_2$ rezultă $a = 0$ sau $A = cI_2,\ c \in \mathbb{Z}$; în ambele cazuri reiese $A^2 = dI_2,\ d \in \mathbb{Z}$.

În sfârşit, din $I_2 = A^4 = d^2I_2$, rezultă $d = \pm 1$.

Subiectul 2. Fie matricele $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $C = AB$ şi $D = BA$. Arătaţi că, dacă

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix},$$

atunci

(1) $C^2 = 3C$ şi $D^3 = 3D^2$;

(2) $D = 3I_2$.

Soluţie. Egalitatea $C^2 = 3C$ rezultă prin calcul direct, iar

$$D^3 = BABABA = BC^2A = 3BCA = 3BABA = 3D^2. \quad (2)$$

Apoi, din $\operatorname{rang}(C^2) = \operatorname{rang}(C) = 2$ şi $C^2 = ABAB = ADA$ rezultă $\operatorname{rang}(D) \geq 2$, deci $\operatorname{rang}(D) = 2$, adică matricea D este inversabilă. Astfel, înmulţind în (2) cu $(D^{-1})^2$, obţinem $D = 3I_2$

Subiectul 3. Fie $x_0 = 0$, $y_0 > 0$ şi şirurile $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ definite prin

$$x_k = x_{k-1} - y_{k-1},$$
$$y_k = y_{k-1} - \mathrm{e}^{x_k} + \mathrm{e}^{x_{k-1}}, \forall k \geq 1.$$

Arătaţi că şirurile $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ admit limite şi calculaţi-le.

Soluţie. Avem $x_1 = -y_0 < 0 = x_0$, $y_1 = y_0 + 1 - \mathrm{e}^{-y_0} > y_0$ şi, inductiv, $x_{n+1} < x_n$, $y_{n+1} > y_n$, deci $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător, iar $(y_n)_{n\geq 0}$ este crescător.

În plus, prin adunare, $y_n = y_0 - \mathrm{e}^{x_n} + \mathrm{e}^{x_0} < y_0 + \mathrm{e}^{x_0} = y_0 + 1$, deci şirul $(y_n)_{n\geq 0}$ este mărginit superior.

Astfel, $(y_n)_{n\geq 0} \to y \in (0, \infty)$, iar $(x_n)_{n\geq 0} \to x \in [-\infty, 0)$.

Prin trecere la limită în relaţia de recurenţă, rezultă $x = x - y$, de unde $x = -\infty$. Apoi, tot prin trecere la limită, $y = y_0 + \mathrm{e}^{x_0} = y_0 + 1$.

Subiectul 4. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin 1 \sin 2 \cdots \sin n$.

Soluţie. Observăm că distanţa dintre orice două intervale consecutive de forma $[n\pi + \pi/6, n\pi + (5\pi)/6]$ este $(\pi)/3 < 2$, iar un astfel de interval are lungimea $(2\pi)/3 > 1$. Astfel, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, dintre numerele $k, k+1, k+2$, cel puţin unul se află într-un interval de această formă.

Rezultă

$$|n \sin 1 \sin 2 \cdots \sin n| \leq n \sin^{[n/3]} \frac{\pi}{6} \leq \frac{n}{2^{n/3}}$$

şi, din $\lim\limits_{n\to\infty} n/(2^{n/3}) = 0$, reiese că limita cerută este 0.