Barem clasa a IX-a

1. Fie n $\in \mathbb{Z}$ astfel ca $\left[\frac{x}{2}\right] = n(1)$.

Pentru soluția x a ecuației trebuie să avem $\{4x\} = 4\sqrt{5} - 7 - n$ (2) (3p)

Din $0 \le 4\sqrt{5} - 7 - n < 1$ urmează $4\sqrt{5} - 8 \le n < 4\sqrt{5} - 7$ $1 \le n < 2$ deci n=1.

Acum (2) devine $\{4x\} = 4(\sqrt{5} - 2)$ și induce $\{x\} = \sqrt{5} - 2$

Prin (1) urmează a)[x]=2 sau b)[x]=3 (2p)

În cazul a) $x = \sqrt{5}$.

În cazul b) $x = 1 + \sqrt{5}$.

Ambele soluții verifică. (2p)

2. Existența lui E asigură convexitatea. (1p)

Avem $\frac{EC}{AE} = \frac{\sigma(BCE)}{\sigma(BAE)} = \frac{\sigma(DCE)}{\sigma(DAE)}$.

Cu proporții derivate deducem

$$\frac{EC}{AE} = \frac{\sigma(BCD)}{\sigma(BAD)} = \frac{BC \cdot CD \cdot \sin C}{AB \cdot AD \cdot \sin A}$$ (4p)

În virtutea acesteia, egalitatea din enunț revine la sinC=sinA.

Cum unghiurile opuse nu pot fie egale, aceasta revine la $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle C) = 180^\circ$, adica la inscriptibilitate. (2p)

3. Fie $a_n = a_0 + n\alpha$, $b_n = b_0 + n\beta$.

Deducem $a_n b_n = A + n \cdot B + n^2 C$ unde $A = a_0 b_0$,

$B = a_0\beta + b_0\alpha$, $C = \alpha \cdot \beta$ 3p

Urmează $u_n = A + (n+2)B + (n+2)^2 C - 2[A + (n+1)B + (n+1)^2 C] +$

$+ A + n \cdot B + n^2 C = C[(n+2)^2 - 2(n+1)^2 + n^2] = 0$. 4p

4. Fie A' mijlocul lui BC. Paralela IL la AB taie BA' in K. OL taie BC în M.

Avem $\frac{LA}{LC} = \frac{KB}{KC}$. Din $\frac{KB}{KA'} = \frac{IA}{IA'}$ rezulta $\frac{KB}{KC} = \frac{IA}{IA + IA'} = \frac{IA}{AA'}$ (2p)

Cu relația lui Menelaos în $\Delta AA'C$ avem $\frac{MA'}{MC} = \frac{LA}{LC} \cdot \frac{OA'}{OA} = \frac{IA}{AA'} \cdot \frac{OA'}{OA} = \frac{(h-r)(h-R)}{hR}$ (2p)

CI este bisectoarea unghiului BCA. Concluzia OL $\perp$ IC revine la MC=LC. (1p)

Calcul MC=LC. (2p)