

Concursul de Matematică „UNIREA”, Ediția a IX-a

Focșani, 30 ianuarie 2009
Clasa a XI-a

Subiectul 1. Arătați că, dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ satisface $A^4 = I_2$, atunci $A^2 = I_2$ sau $A^2 = -I_2$.

Subiectul 2. Fie matricele $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $C = AB$ și $D = BA$. Arătați că, dacă

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix},$$

atunci

- (1) $C^2 = 3C$ și $D^3 = 3D^2$;
- (2) $D = 3I_2$.

Subiectul 3. Fie $x_0 = 0$, $y_0 > 0$ și șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ definite prin

$$\begin{aligned} x_k &= x_{k-1} - y_{k-1}, \quad \forall k \geq 1 \\ y_k &= y_{k-1} - e^{x_k} + e^{x_{k-1}}, \quad \forall k \geq 1. \end{aligned}$$

Să se arate că șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ admit limite și să se calculeze limitele lor.

Subiectul 4. Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin 1 \sin 2 \cdots \sin n.$$

Timp de lucru: 3 ore