Clasa a X-a

Subiectul 1. Considerând partea întreagă şi partea fracţionară, deducem

$$\left[5x^3\right] = 1 \tag{1}$$

şi

$$\left\{2x^2\right\} = 3 - \sqrt{5}. \tag{2}$$

Din (1) rezultă $1 \leq 5x^3 < 2$, de unde $2\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} \leq 2x^2 < 2\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$, deci

$$0 < 2x^2 < 2.$$

Dacă $[2x^2] = 0$, rezultă $2x^2 = 3-\sqrt{5}$, adică $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Atunci $x^3 = \sqrt{5}-2$ şi condiţia $1 \leq 5x^3 < 2$ este verificată.

Dacă $[2x^2] = 1$, obţinem $2x^2 = 4 - \sqrt{5} > 1{,}7$, de unde $5x^3 > 3{,}6$ contrazicând (1).

Subiectul 2. a) Funcţia f este strict crescătoare pe intervalul $[m, +\infty)$, deci este injectivă. Pentru surjectivitate, să considerăm $y \in [1, +\infty)$ şi să observăm că ecuaţia $f(x) = y$ are soluţia $x = m + \sqrt{y-1} \in [m, +\infty)$.

b) Ecuaţia se poate scrie sub forma $f(x) = f^{-1}(x)$, sau, echivalent,

$$f(f(x)) = x.$$

Deoarece f este strict crescătoare, această ecuaţie este echivalentă cu $f(x) = x$. Într-adevăr, dacă x_0 este o soluţie a ecuaţiei $f(f(x)) = x$ şi presupunem $f(x_0) < x_0$, atunci $f(f(x_0)) < f(x_0) < x_0$, ceea ce contrazice ipoteza. La fel, presupunând $f(x_0) > x_0$, obţinem o contradicţie.

Ecuaţia $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 1 = 0$ are soluţiile reale

$$x_{1,2} = \frac{2m+1 \pm \sqrt{4m-3}}{2},$$

şi se verifică uşor că $x_{1,2} \geq 1$.

Subiectul 3. Obţinem imediat $f(0) = 0$, $f(x^2) = xf(x)$ şi

$$f\left(-y^2\right) = -yf(y) = -f\left(y^2\right),$$

de unde $f(-x) = -f(x)$, pentru orice x real.

Apoi

$$f\left(x^2\right) = f\left(2x^2 - x^2\right) = x\left(\sqrt{2}+1\right)\left(f\left(x\sqrt{2}\right) - f(x)\right).$$

Dar $f(2x^2) = x\sqrt{2}f\left(x\sqrt{2}\right)$, de unde

$$f\left(x^2\right) = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}f\left(2x^2\right) - \left(\sqrt{2}+1\right)f\left(x^2\right),$$

şi deducem $f(2x^2) = 2f(x^2)$, pentru orice x real. Folosind şi imparitatea funcţiei f, rezultă $f(2x) = 2f(x)$, pentru orice x real.

Raţionând inductiv (pornind, ca mai sus, de la $f(x^2) = f((n+1)x^2 - nx^2)$) obţinem $f(nx) = nf(x)$, pentru orice n natural şi orice x real.

Subiectul 4. Avem

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=1,$$

de unde

$$a-b=\sqrt{a}+\sqrt{b},$$

şi

$$a^2-b^2=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)(a+b).$$

De aici obţinem

$$\left(a^2-b^2\right)^2=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2(a+b)^2\leq 2(a+b)(a+b)^2,$$

deci

$$a^4+b^4-2a^2b^2\leq 2(a+b)^3.$$