Clasa a XII-a, SOLUŢII

Subiectul 1. Într-un grup $(G, \cdot)$ de ordin 6 şi element neutru e se consideră elementele a, b, $a \neq e, b \neq e$, astfel încât $a^3 = e$, $b^2 = e$. Fie $c = ab$.

(1) Arătaţi că $c = ba^2$ sau $c = ba$.

(2) Calculaţi ordinul lui c când $c = ba^2$, respectiv $c = ba$.

Soluţie. (1) Evident ord $a = 3$ şi ord $b = 2$ şi elementele e, a, a^2 sunt distincte iar $b \notin \{e, a, a^2\}$ (ord $b = 2$, ord $e = 1$, ord $a^2 = 3 =$ ord a).

Elementele b, ba, ba^2 sunt distincte şi fiecare diferit de e, a, a^2 (de exemplu, prin absurd, din $ba = a^2$, prin simplificare am deduce $b = a$).

Rezultă că prezentarea lui G este

$$G = \{e, a, a^2, b, ba, ba^2\}$$

şi cum $c \notin \{e, a, a^2, b\}$ deducem $c \in \{ba^2, ba\}$

(2) Dacă $c = ba^2$ avem $c^2 = ba^2ba^2 = baaba^2 = baba^2a^2 = baba = bba^2a = e \cdot e = e$, deci ordinul lui c este 2. . . . . .1 punct

Dacă $c = ba$ atunci $c^2 = baba = bbaa = a^2 \neq e$. Analog se arată că $c^3 \neq e, c^4 \neq e, c^5 \neq e$ iar $c^6 = c^5c = ba^2ba = b^2a^3 = e$, dci ord $c = 6$.

Subiectul 2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{4} \\ \hat{3} & \hat{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$. Să se decidă dacă mulţimea $G = \{A, A^2, A^3, A^4\}$ este grup în raport cu înmulţirea matricelor.

Soluţie. Prin calcul se stabileşte următoarea tablă de operaţii

	A	A^2	A^3	A^4
A	A^2	A^3	A^4	A
A^2	A^3	A^4	A	A^2
A^3	A^4	A	A^2	A^3
A^4	A	A^2	A^3	A^4

de unde rezultă că G este grup cu elementul neutru A^4 (în fapt izomorf cu $(\mathbb{Z}_4, +)$)

Subiectul 3. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, derivabilă, cu derivata continuă şi satisfăcând $f(0) = 0$. Arătaţi că dacă $f(x)f'(x) \geq x$ pentru orice $x \in [0, \infty)$, atunci $|f(x)| \geq |x|$ oricare ar fi $x \in [0, \infty)$.

Soluţie. Prin integrare pe intervalul $[0, x]$ deducem

$$\int_0^x f(t)f'(t)\mathrm{d}t \geq \int_0^x t\mathrm{d}t,$$

adică $\frac{1}{2}(f(x))^2 \geq \frac{1}{2}x^2$ de unde rezultatul.

Observaţie. Soluţia în care se studiază $g(x) = f^2(x) - x^2$ se punctează corespunzător.

Subiectul 4. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann şi $(x_n)_n$ un şir convergent de numere reale. Să se arate că şirul $(y_n)_n$ dat de

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

este convergent şi să se calculeze limita.

Soluţie. Notăm cu l limita şirului $(x_n)_n$. Vom arăta că $\lim_{n\to\infty} y_n = l\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Avem

$$y_n - l\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - l)f\left(\frac{k}{n}\right) + l\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right).$$

Al doilea termen din membrul drept converge către 0 din definiţia integralei Riemann. Pentru primul avem

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - l)f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \sup_{[0,1]}|f(t)|\sum_{k=1}^{n}\frac{|x_k - l|}{n},$$

ce converge la 0 din lema lui Cesaro aplicată pentru şirul $(|x_n - l|)_n$.