

Concursul de Matematică „UNIREA”, Ediția a IX-a

Focșani, 30 ianuarie 2009
Clasa a X-a

Subiectul 1. Rezolvați ecuația

$$\lceil 5x^3 \rceil + \{2x^2\} = 4 - \sqrt{5}.$$

Subiectul 2. Se consideră $m \in \mathbb{R}, m \geq 1$ și funcția

$$f : [m, \infty) \rightarrow [1, \infty), \quad f(x) = x^2 - 2mx + m^2 + 1.$$

- a) Arătați că funcția f este o bijecție.
- b) Rezolvați ecuația

$$x^2 - 2mx + m^2 + 1 = m + \sqrt{x - 1}.$$

Subiectul 3. 5. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea:

$$f(x^2 - y^2) = (x + y)(f(x) - f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Demonstrați că

$$f(2009x) = 2009f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Subiectul 4. Fie $a, b > 0$, astfel încât $\sqrt{a} = 1 + \sqrt{b}$. Demonstrați că

$$\frac{a^4 + b^4}{2} < a^2b^2 + (a + b)^3.$$

Timp de lucru: 3 ore