Concursul de Matematică „UNIREA”, Ediţia a IX-a

Focşani, 30 ianuarie 2009
Clasa a XII-a

Subiectul 1. Într-un grup $(G, \cdot)$ de ordin 6 şi element neutru e se consideră elementele a, b, $a \neq e, b \neq e$, astfel încât $a^3 = e$, $b^2 = e$. Fie $c = ab$.
(1) Arătaţi că $c = ba^2$ sau $c = ba$.
(2) Calculaţi ordinul lui c când $c = ba^2$, respectiv $c = ba$.

Subiectul 2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{4} \\ \hat{3} & \hat{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$. Decideţi dacă mulţimea $G = \{A, A^2, A^3, A^4\}$ este grup în raport cu înmulţirea matricelor.

Subiectul 3. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, derivabilă, cu derivata continuă şi satisfăcând $f(0) = 0$. Arătaţi că, dacă $f(x)f'(x) \geq x$ pentru orice $x \in [0, \infty)$, atunci $|f(x)| \geq |x|$ oricare ar fi $x \in [0, \infty)$.

Subiectul 4. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann şi $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir convergent de numere reale. Arătaţi că şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ dat de

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

este convergent şi să i se calculeze limita.

Timp de lucru: 3 ore